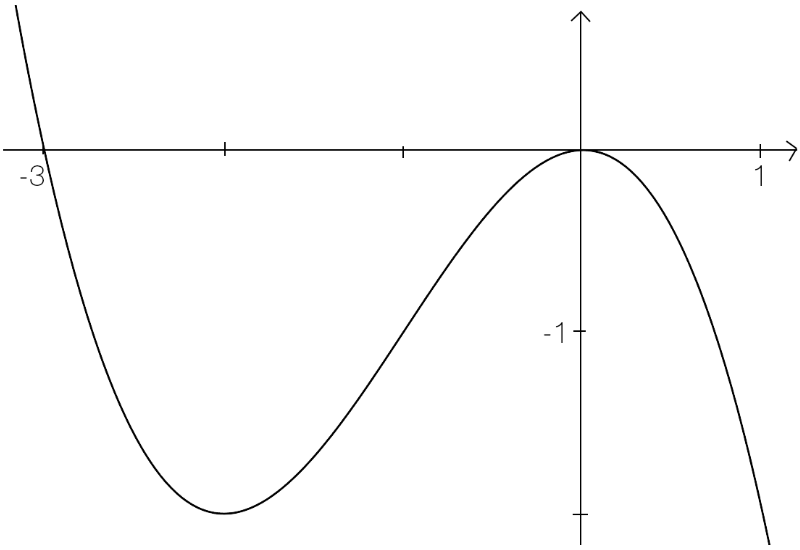
# Differentialquotient

**Aufgabe 1**

- Gegeben:
  Das Bild zeigt den Graphen der Funktion $f$ mit $f(x) = -0{,}5x^3 - 1{,}5x^2$




- Gesucht:

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion. Berechnen Sie in diesen Nullstellen die Steigung des Graphen $G_f$ und den Winkel, unter dem der Graph $G_f$ die x-Achse schneidet.

b) Bestimmen Sie die Steigung von $G_f$ in den Punkten P (-1 | $y_P$) und Q (1 | $y_Q$) und den Winkel unter dem die Tangenten, in diesen Punkten, jeweils die x–Achse schneiden.

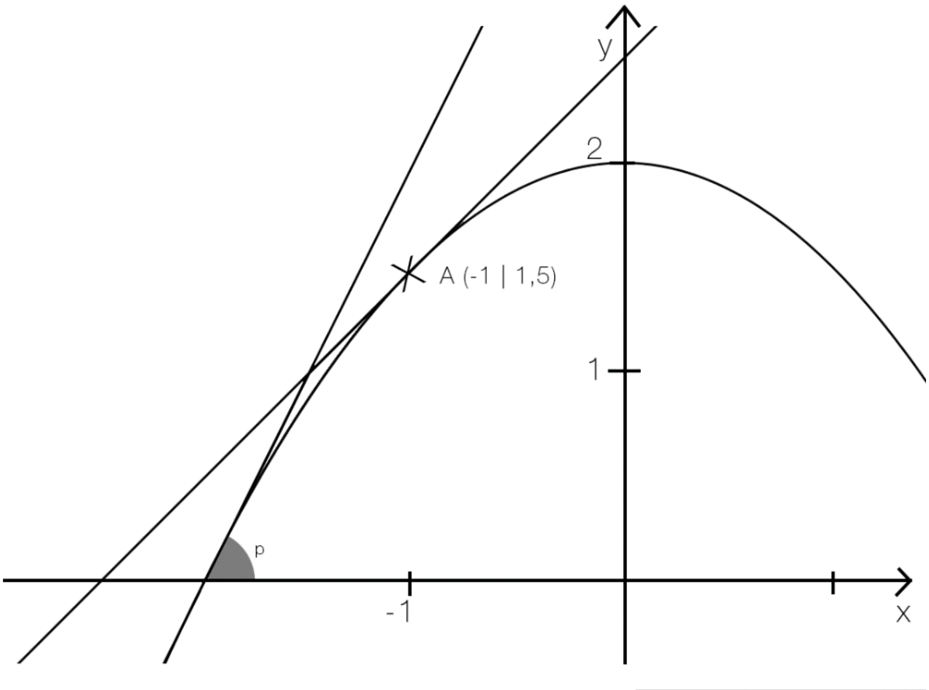
c) Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Punkt $P_0$ ($x_0$ | $y_0$) die Steigung von $G_f$ den Wert m = $m_{x_0}$ mit $m_{x_0} = -1{,}5x_0^2 - 3x_0$ besitzt.

d) Es ist ersichtlich, dass die Funktion $f$ im Intervall [-3; -1] ein lokales Minimum besitzt. Wie kann man dieses lokale Minimum rechnerisch ermitteln.

## Aufgabe 2

- Gegeben:
  Das Bild zeigt den Graphen der Funktion $g$ mit $g(x) = -0{,}5x^2 + 2$




- Gesucht:
  a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt A (–1 | 1,5) des Graphen von $g$.

  b) Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen $G_g$ mit der negativen x–Achse und den Schnittwinkel der Tangente in diesem Punkt mit der x–Achse.

## Aufgabe 3

- Gegeben:
  Die Grafik zeigt die Verkaufszahlen $V(t)$ eines neuen Smartphones in den Monaten $t$ nach der Markteinführung an.
  Die Verkaufszahlen werden in Tausenden pro Monat gemessen und können durch die Funktion $V(t)$ näherungsweise beschrieben werden:

  $$V(t) = \frac{750t}{250+t^3}$$


- Gesucht:
  Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Hilfe des angegebenen Graphen von $V(t)$.

  a) In welchem Monat wurden die meisten Smartphones verkauft?

  b) Wie groß war die mittlere Änderungsrate der Verkäufe im ersten Monat nach der Einführung?

  c) Wann sank der Verkauf am stärksten pro Monat und wie groß ist er etwa?

  d) Geben Sie einen mathematischen Rechenausdruck für die momentane Änderungsrate im 10. Monat an und berechnen Sie dessen genauen Wert.

**Aufgabe 4**

- Gegeben:
  Die Funktion $f$ mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 - 2x + 4$
  und ihre Ableitung $f'(x) = 1{,}5x^2 - 9x - 2$

- Gesucht:
  a) Berechnen Sie alle Stellen an denen die Tangente an den Graphen $G_f$ parallel ist zur Geraden $g$ mit $g(x) = 8{,}5x - 5$.
  Geben Sie die Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse an.

  b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $t$ an den Graphen $G_f$ im Punkt A (6,5 | $y_A$)

  c) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente $t$ (siehe Teilaufgabe 4b) eine Fläche ein.
  Berechnen Sie den Flächeninhalt.

**Aufgabe 5**

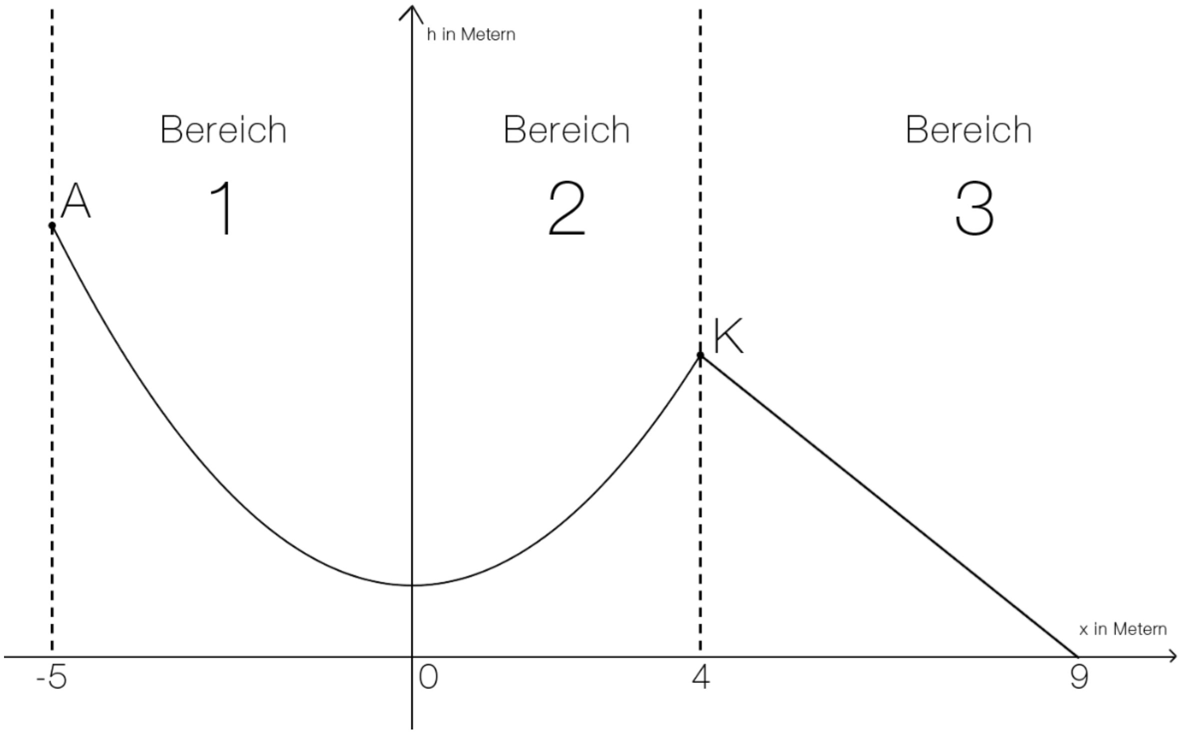
- Gegeben:
  Als Faustregel für einen frei fallenden Körper (ideal, ohne Luftwiderstand) kann man die Funktion $s(t) = 5 \cdot t^2$ verwenden. $s(t)$ ist dabei die Fallhöhe seit dem Beginn des Falls in Metern, $t$ ist die dazu benötigte Zeit in Sekunden.

- Gesucht:
  a) Bestimmen sie den Wert $\frac{s(30)-s(20)}{10}$ und deuten Sie ihn im Sachzusammenhang.
  b) Wie groß ist theoretisch die Geschwindigkeit eines Steines, den man von der Spitze des Mount Everest (8848 m) fallen lässt nach 40 Sekunden. Welche Strecke in Metern hat er nach 40 Sekunden zurückgelegt?

**Aufgabe 6**

- Gegeben:




Bei einem Staudamm soll am Ablauf ein neuartiges Querschnittsprofil eingebaut werden, um die Bodenerosion durch Auswaschung / Ausspülung zu verringern.
Die Form des Profils kann bei dem gewählten Koordinatensystem als abschnittsweise definierte Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}2\,(x^2 + 5) & für \quad -5 \leq x \leq 4 \\ -0{,}8x + 7{,}4 & für \quad 4 < x \leq 9{,}25 \end{cases}$$

beschrieben werden. A ist dabei der Anfangspunkt des Profils, am Punkt K hat das Profil einen Knick.

- Gesucht:
  a) Geben Sie die Scheitelpunktform des Parabelterms an.

  b) Bestimmen Sie rechnerisch das mittlere Gefälle,
  dass das Profil auf den ersten 3 Metern hat.

  c) Am Punkt K bewegt sich das ausströmende Wasser zunächst tangential weiter.
  Berechnen Sie in K die Tangentengleichung.

  d) Zur Optimierung soll nun das Profil verändert werden. Der gerade Teil des Profils (Bereich 3) soll jetzt parallel so verschoben werden, dass er eine Normale zum parabelförmigen Teil (Bereich 2) ist.
  Berechnen Sie die neuen Koordinaten des Punktes K*.

  e) An der Stelle x = –5 beträgt die Ableitung g‘(x) = –2
  ($\triangleq$ *der Steigung m der Tangente in diesem Punkt*).
  Bestimmen Sie den Schnittwinkel $\varepsilon$ den die Tangente an den Graphen von $g$ im Punkt A mit der **<u>y-Achse</u>** einschließt. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen.

**Aufgabe 7**

- Gegeben:
  Die Dammkrone eines Kanals soll ein Erdwall bilden, dessen Querschnitt durch die Funktion $f$

$$f(x) = ax(x-3)^2$$

  beschrieben wird, wobei x die Länge in Metern ist und y seine Höhe in Metern.
  Es gilt $\mathbb{D}_f = [0\,;3]$ und a$\in \mathbb{R}$.

- Gesucht:
  a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Krone für alle Parameter a eine waagerechte Stelle bei x = 1 besitzt.
  b) Die Krone soll an der Stelle x = 0,5 eine Steigung von 1,5 haben.
  Bestimmen Sie den entsprechenden Parameterwert a.

  Im Folgenden soll der Parameter a den Wert a = 0,4 haben.

  c) Berechnen Sie das mittlere Gefälle der Dammkrone ab der waagrechten Stelle in Prozent.
  d) Aus Kostengründen soll jetzt die Dammkrone ab der Stelle x = 2 einen geradlinigen Verlauf mit konstantem Gefälle haben.
  Zeichnen Sie die neue Bahn in die untenstehende Zeichnung ein.
  Berechnen Sie genau, um wieviel Prozent sich dadurch die Breite der Dammkrone verringert.