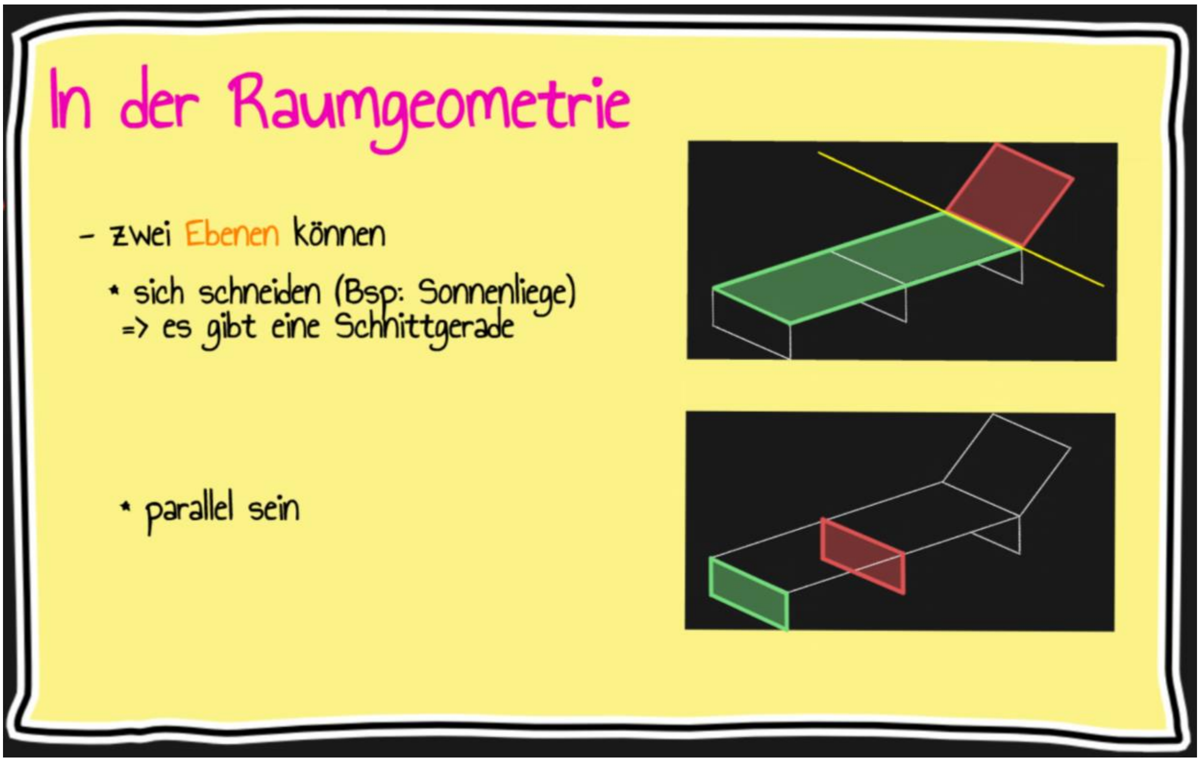
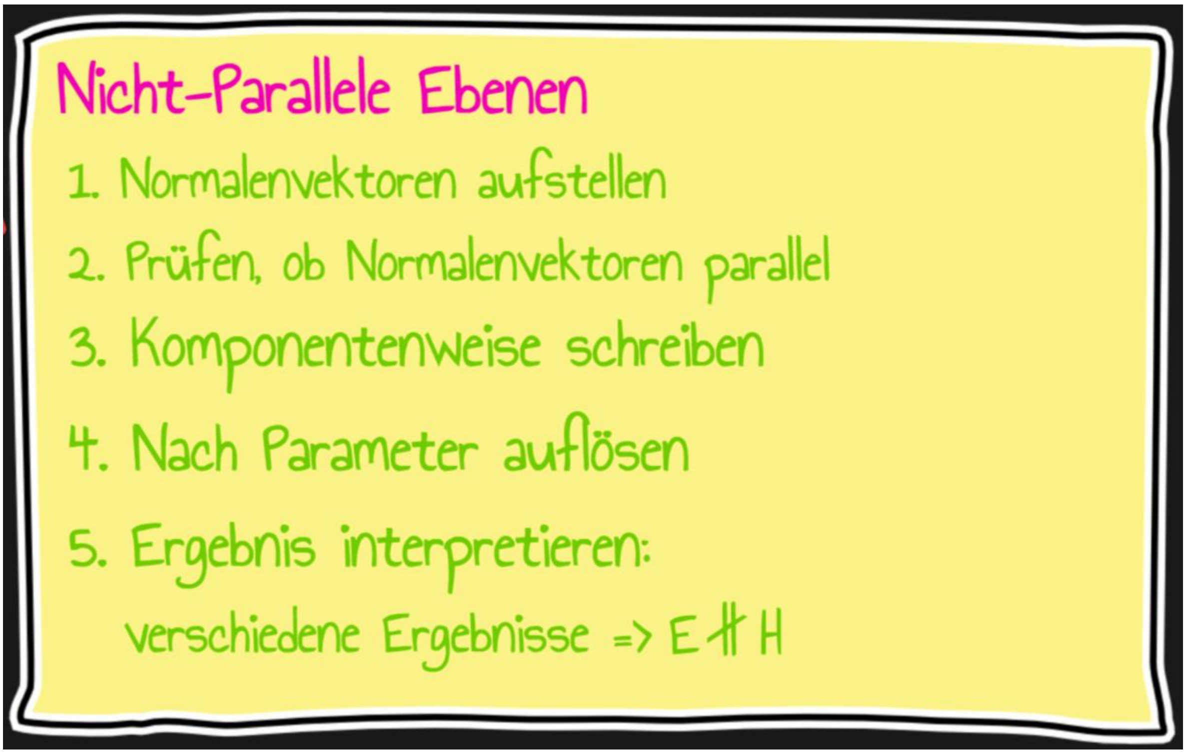
Gegenseitige Lage von Ebenen

Das hast du schon gelernt:





Aufstellen der Gleichung der Schnittgeraden

- Zwei Ebenen können jeweils in:
  Parameter-, Vektor- oder Koordinatenform gegeben sein

- Je nach Kombination der gegebenen Ebenenformen:
  spezielles Verfahren anwenden um Gleichungssystem aufzustellen

- Eine Unbekannte läßt sich immer nicht bestimmen
  => als Parameter der Geradengleichung verwenden

Parallele Ebenen 1

1. Normalenvektoren aufstellen
2. Prüfen, ob Normalenvektoren parallel
3. Komponentenweise schreiben
4. Nach Parameter auflösen
5. Ergebnis interpretieren:
   gleiche Ergebnisse => E parallel H

Parallele Ebenen 2

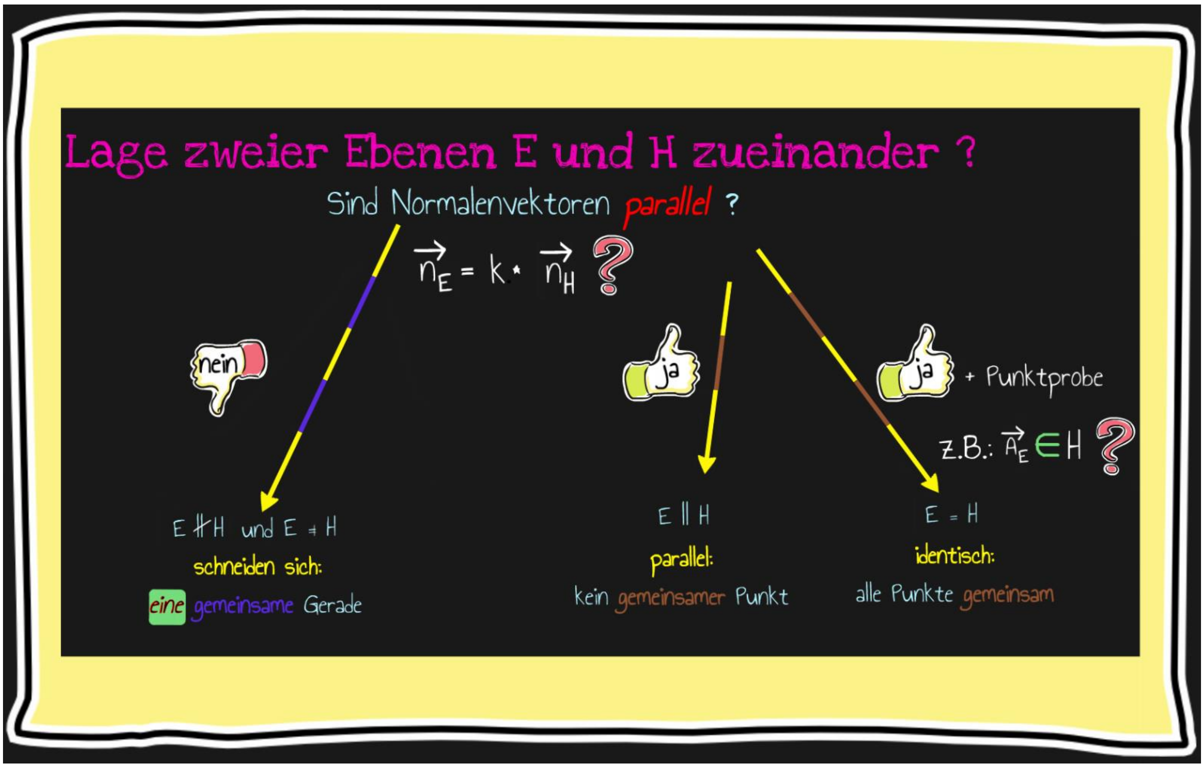
$E \parallel H$

6. Punktprobe durchführen

(Punkt der einen Ebene in andere einsetzen) $\quad \vec{A}_E \in H$

7. Ergebnis interpretieren:

wahre Aussage => E identisch H



Aufgabe 1:

a) gegeben:

E: $-4x_1 + 9x_2 + 11{,}5x_3 - 80 = 0$ und F: $8x_1 - 18x_2 - 23x_3 + 291 = 0$

$\mathrm{A}\,(-3{,}5|\,3{,}5\,|\,3)$ mit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$; $\mathrm{B}\,(-5|\,5\,|\,7)$ mit $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 11{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ -23 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow s = -2 \\ \Rightarrow s = -2 \\ \Rightarrow s = -2 \end{array}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$8 \cdot (-3{,}5) - 18 \cdot 3{,}5 - 23 \cdot 3 + 291 = 0$$
$$131 = 0 \text{ (falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keine Schnittgerade

b) gegeben:

E: $14x_1 + 3{,}5x_2 + 14x_3 - 21 = 0$ und F: $4x_1 + x_2 + 4x_3 - 94 = 0$

$\mathrm{A}\,(-4{,}25|\,1\,|\,5{,}5)$ mit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$; $\mathrm{B}\,(4{,}5|-4\,|\,20)$ mit $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3{,}5 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow s = 3{,}5 \\ \Rightarrow s = 3{,}5 \\ \Rightarrow s = 3{,}5 \end{array}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$4 \cdot (-4{,}25) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 5{,}5 - 94 = 0$$
$$-88 = 0 \text{ (falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keine Schnittgerade

Aufgabe 1:

c) gegeben:

E: $4x_1 + 0{,}25x_2 + 2{,}5x_3 + 3 = 0$ und F: $-16x_1 - x_2 - 10x_3 + 260 = 0$

$\mathrm{A}\ (6{,}5|\ 0{,}5\ |\ 3)$ mit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$; $\mathrm{B}\ (-1{,}5|\ 4\ |\ 28)$ mit $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0{,}25 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow s = -4 \\ \Rightarrow s = -4 \\ \Rightarrow s = -4 \end{array}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$-16 \cdot 6{,}5 - 0{,}5 - 10 \cdot 3 + 260 = 0$$
$$125{,}5 = 0 \ \text{(falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keine Schnittgerade

Aufgabe 2:

a) gegeben:

E: $9x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 8 = 0$ und F: $-13{,}5x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 12 = 0$

$\mathrm{A}\ (-4|-6\ |\ 5)$ mit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$; $\mathrm{B}\ (-16|\ 0\ |\ 17)$ mit $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13{,}5 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow s = -1{,}5 \\ \Rightarrow s = -1{,}5 \\ \Rightarrow s = -1{,}5 \end{array}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$-13{,}5 \cdot (-4) - 3 \cdot (-6) - 12 \cdot 5 - 12 = 0$$
$$0 = 0 \ \text{(wahr)}$$

⇨ identisch

Aufgabe 2:

b) gegeben:

E: $-x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 25 = 0$ und F: $-2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + 20x_3 + 62{,}5 = 0$

$A\,(7|\,2|\,-3)$ mit $A \in E$; $B\,(9|-8\,|\,1)$ mit $B \in F$

Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen

$$s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 7{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow s = 2{,}5 \\ \Rightarrow s = 2{,}5 \\ \Rightarrow s = 2{,}5 \end{matrix}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

Punktprobe durchführen (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$-2{,}5 \cdot 7 + 7{,}5 \cdot 2 + 20 \cdot (-3) + 62{,}5 = 0$$
$$0 = 0 \text{ (wahr)}$$

⇨ identisch

c) gegeben:

E: $30{,}5x_1 - x_2 - 9{,}5x_3 - 96 = 0$ und F: $-61\,x_1 + 2x_2 + 19x_3 + 192 = 0$

$A\,(2{,}5|-5{,}5\,|-1{,}5)$ mit $A \in E$; $B\,(0{,}5|-9{,}5\,|\,7{,}5)$ mit $B \in F$

Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen

$$s \cdot \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ -1 \\ -9{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -61 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow s = -2 \\ \Rightarrow s = -2 \\ \Rightarrow s = -2 \end{matrix}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

Punktprobe durchführen (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$-61 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot (-5{,}5) + 19 \cdot (-1{,}5) + 192 = 0$$
$$0 = 0 \text{ (wahr)}$$

⇨ identisch

Aufgabe 3:

a) gegeben:

E: $-x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 0$ und F: $-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0$

$A\ (0|\ 0\ |-3)$ mit $A \in E$; $B\ (6|-2\ |5)$ mit $B \in F$

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow s = -2 \\ \Rightarrow s = -2 \\ \Rightarrow s = 3 \end{matrix}$$

⇨ linear **UN**abhängig
⇨ schneiden sich

<u>Schnittgerade g berechnen</u>

Lösen des Gleichungssystems: z.B. $x_3 = \lambda$ setzen

E: $-x_1 + x_2 + \lambda + 3 = 0$

F: $-2x_1 - 2x_2 + \lambda + 3 = 0$

aus E: $x_2 = x_1 - \lambda - 3$ (in F einsetzen)

$$\Rightarrow -2x_1 - 2(x_1 - \lambda - 3) + \lambda + 3 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_1 + 2\lambda + 6 + \lambda + 3 = 0$$

$$-4x_1 + 3\lambda + 9 = 0 \qquad | -9; \ | -3\lambda; \ | : (-4)$$

$$x_1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\lambda \qquad (\text{in } x_2 \text{einsetzen})$$

$$x_2 = x_1 - \lambda - 3$$

$$x_2 = \tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{4}\lambda - \lambda - 3$$

$$x_2 = -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda$$

<u>Geradengleichung aufstellen</u>

$$\left.\begin{matrix} x_1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cdot \lambda \\ x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \lambda \\ x_3 = 0 + 1 \cdot \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ -0{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hinweis: **eine** mögliche Form der Schnittgeradengleichung
(Weiterer möglicher Aufpunkt C $(0|0\ |-3)$)

Aufgabe 3:

b) gegeben:

E: $2x_1 + 3x_2 - 13 = 0$ und F: $-x_1 - 14x_2 - 5x_3 + 69 = 0$

A $(2|\,3\,|\,5)$ mit A $\in$ E ; B $(-4|\,2\,|9)$ mit B $\in$ F

Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen

$$s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -14 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow s = -0{,}5 \\ \Rightarrow s = -\frac{14}{3} \\ \Rightarrow s = \{\,\} \end{array}$$

⇨ linear **UN**abhängig

⇨ schneiden sich

Schnittgerade g berechnen

Lösen des Gleichungssystems: z.B. $x_3 = \lambda$ setzen

E: $2x_1 + 3x_2 - 13 = 0$

F: $-x_1 - 14x_2 - 5\lambda + 69 = 0$

aus F: $x_1 = -14x_2 - 5\lambda + 69$ (in E einsetzen)

$$\Rightarrow 2(-14x_2 - 5\lambda + 69) + 3x_2 - 13 = 0$$

$$-28x_2 - 10\lambda + 138 + 3x_2 - 13 = 0$$

$$-25x_2 - 10\lambda + 125 = 0 \qquad |-125;\ |+10\,\lambda;\ |:(-25)$$

$$x_2 = \frac{125}{25} - \frac{10}{25}\lambda$$

$$x_2 = 5 - \frac{10}{25}\lambda \qquad \text{(in } x_1 \text{ einsetzen)}$$

$$x_1 = -14x_2 - 5\lambda + 69$$

$$x_1 = -14 \cdot \left(5 - \tfrac{10}{25}\lambda\right) - 5\lambda + 69$$

$$x_1 = -70 + \tfrac{28}{5}\lambda - 5\lambda + 69$$

$$x_1 = -1 + \tfrac{3}{5}\lambda$$

Geradengleichung aufstellen

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 + \frac{3}{5} \cdot \lambda \\ x_2 = 5 - \frac{10}{25} \cdot \lambda \\ x_3 = 0 + 1 \cdot \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow g\!: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: **eine** mögliche Form der Schnittgeradengleichung

(Weiterere mögliche Aufpunkte C $(6{,}5|\,0\,|12{,}5)$ und D $\left(0\middle|\,4\tfrac{1}{3}\,\middle|1\tfrac{1}{3}\right)$

Aufgabe 3:

c) gegeben:

E: $8x_1 + 28x_2 + 3x_3 - 88 = 0$ und F: $7x_1 - 18x_2 - 8x_3 + 93 = 0$

A $(-5|\ 5\ |-4)$ mit A ∈ E ; B $(-3|\ 0\ |9)$ mit B ∈ F

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 28 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow s = \tfrac{7}{8} \\ &\Rightarrow s = \tfrac{-18}{28} \\ &\Rightarrow s = \tfrac{-8}{3} \end{aligned}$$

⇨ linear **UN**abhängig
⇨ schneiden sich

<u>Schnittgerade g berechnen</u>

Lösen des Gleichungssystems: z.B. $x_3 = \lambda$ setzen und Additionsverfahren

$$\begin{array}{llr} \text{E:} & 8x_1 + 28x_2 + 3\lambda - 88 = 0 & |\cdot 18 \\ \text{F:} & 7x_1 - 18x_2 - 8\lambda + 93 = 0 & |\cdot 28 \\ \hline & 340x_1 \quad - 170\lambda + 1020 = 0 & | -1020;\ | +170\lambda\ ;\ | : 340 \end{array}$$

$\Rightarrow\ x_1 = -3 + 0{,}5\lambda$ (in E einsetzen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow 8(-3 + 0{,}5\lambda) + 28x_2 + 3\lambda - 88 &= 0 \\ -24 + 4\lambda + 28x_2 + 3\lambda - 88 &= 0 \\ 7\lambda + 28x_2 - 112 &= 0 \qquad | +112;\ | -7\lambda;\ | : 28 \\ x_2 &= 4 - 0{,}25\lambda \end{aligned}$$

<u>Geradengleichung aufstellen</u>

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -3 + \frac{1}{2}\cdot\lambda \\ x_2 &= 4 - \frac{1}{4}\cdot\lambda \\ x_3 &= 0 + 1\cdot\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hinweis: **eine** mögliche Form der Schnittgeradengleichung
(Weiterere mögliche Aufpunkte C $(5|\ 0\ |16)$ und D $(0|\ 2{,}5\ |6)$

Aufgabe 4:

a) gegeben:

E: $-13{,}5x_1 + 18x_2 - 4{,}5x_3 - 36 = 0$ und F: $3x_1 - 4x_2 + x_3 - 14 = 0$

$\mathrm{A}\;(-10|-6\,|-2)$ mit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$; $\mathrm{B}\;(8|\,3\,|\,2)$ mit $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13{,}5 \\ 18 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow s = -4{,}5 \\ \Rightarrow s = -4{,}5 \\ \Rightarrow s = -4{,}5 \end{matrix}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$3 \cdot (-10) - 4 \cdot (-6) + 1 \cdot (-2) - 14 = 0$$
$$-22 = 0 \text{ (falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keine Schnittgerade

Aufgabe 4:

b) gegeben:

E: $3x_1 + 10x_2 + x_3 - 32 = 0$ und F: $-7x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 1 = 0$

$A\,(-1|\,3\,|\,5)$ mit $A \in E$; $B\,(-3|\,7\,|10)$ mit $B \in F$

Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen

$$s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow s = \tfrac{7}{3} \\ &\Rightarrow s = -0{,}6 \\ &\Rightarrow s = 2 \end{aligned}$$

⇨ linear **UN**abhängig
⇨ schneiden sich

Schnittgerade g berechnen

Lösen des Gleichungssystems: z.B. $x_1 = \lambda$ setzen und Additionsverfahren

$$\begin{aligned} E:\quad & 3\lambda + 10x_2 + x_3 - 32 = 0 \qquad | \cdot (-2) \\ F:\quad & \underline{-7\lambda - 6x_2 + 2x_3 + 1 = 0} \\ & -13\lambda - 26x_2 \qquad + 65 = 0 \qquad | -65;\ | +13\lambda\,;\ | : (-26) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2{,}5 - 0{,}5\lambda \qquad \text{(in E einsetzen)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3\lambda + 10(2{,}5 - 0{,}5\lambda) + x_3 - 32 &= 0 \\ 3\lambda + 25 - 5\lambda + x_3 - 32 &= 0 \\ -2\lambda - 7 + x_3 &= 0 \qquad | +7;\ | +2\lambda; \\ x_3 &= 7 + 2\lambda \end{aligned}$$

Geradengleichung aufstellen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 + 1 \cdot \lambda \\ x_2 &= 2{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \\ x_3 &= 7 + 2 \cdot \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hinweis: **eine** mögliche Form der Schnittgeradengleichung
(Weiterere mögliche Aufpunkte C $(-3{,}5|\,4{,}25\,|0)$ und D $(5|\,0|17)$

Aufgabe 4:

c) gegeben:

E: $-x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 30 = 0$ und F: $3{,}5x_1 - 10{,}5x_2 - 14x_3 + 105 = 0$

$\mathrm{A}\,(-10|\,4\,|\,2)$ mit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$; $\mathrm{B}\,(3|15\,|-3)$ mit $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$

<u>Beide Normalenvektoren auf lineare Un-/ Abhängigkeit prüfen</u>

$$s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -10{,}5 \\ -14 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow s = -3{,}5 \\ \Rightarrow s = -3{,}5 \\ \Rightarrow s = -3{,}5 \end{matrix}$$

⇨ linear abhängig
⇨ echt parallel oder identisch

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Punkt A in die Ebenen F einsetzen)

$$3{,}5 \cdot (-10) - 10{,}5 \cdot 4 - 14 \cdot 2 + 105 = 0$$
$$0 = 0 \text{ (wahr)}$$

⇨ identisch