Lösungsblatt zu: Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Das hast du schon gelernt:

In der Raumgeometrie

Bei einer Ebene kann eine Gerade

- parallel zu ihr sein
- parallel sein, aber in ihr liegen
- sie schneiden

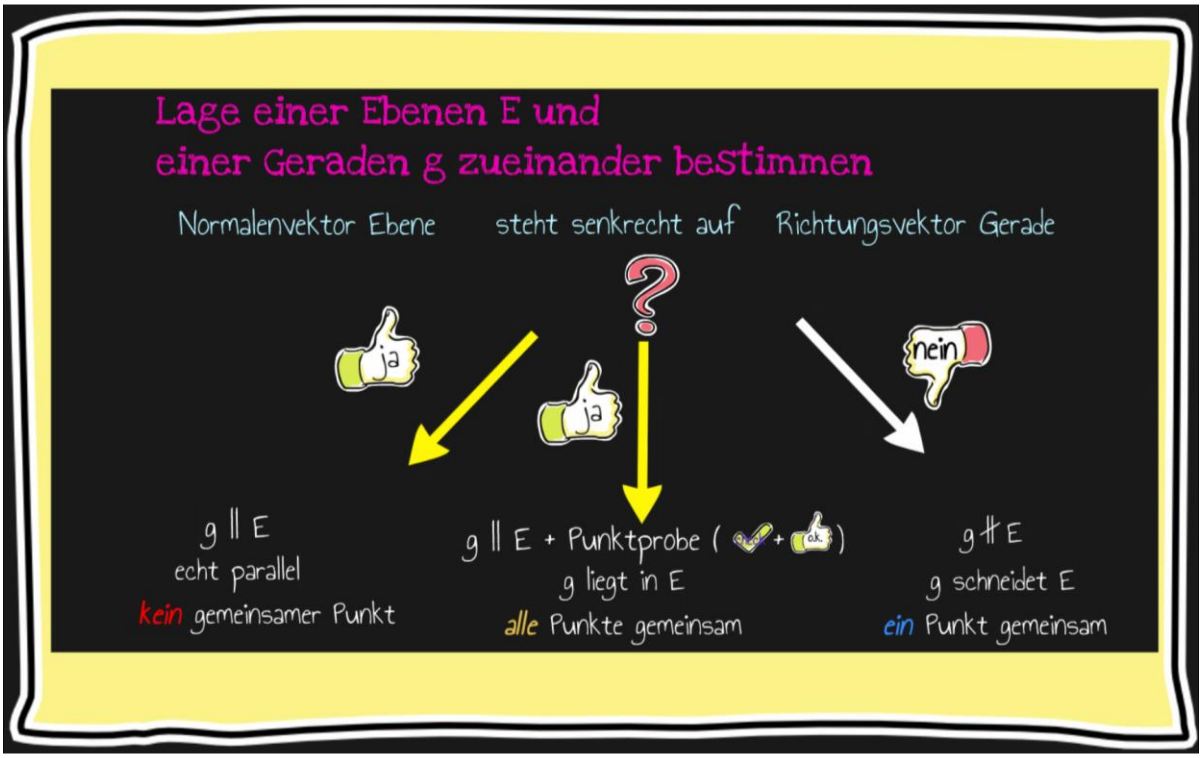
1. Richtungsvektor von g, Normalenvektor von E aufstellen
2. Skalarprodukt von Richtungs- und Normalenvektor berechnen
3. Ergebnis interpretieren

Skalarprodukt: " null "

4. Punktprobe durchführen
5. Ergebnis interpretieren
   - => g echt parallel zu E
   - => g liegt in E

Skalarprodukt: " nicht null "

4. Schnittpunkt berechnen


Lage einer Ebenen E und
einer Geraden g zueinander bestimmen
Normalenvektor Ebene
steht senkrecht auf
Richtungsvektor Gerade
ja
ja
nein
g ∥ E
echt parallel
kein gemeinsamer Punkt
g ∥ E + Punktprobe (+ ok)
g liegt in E
alle Punkte gemeinsam
g ∦ E
g schneidet E
ein Punkt gemeinsam

Aufgabe 1:

a) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und E: $-14x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 35 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-14) + (-4) \cdot 2 + (-2) \cdot (-11) = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $-14x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 35 = 0$

$$-14 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 11 \cdot 10 + 35 = 0$$

$$-55 = 0 \qquad \text{(falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keinen Schnittpunkt

Aufgabe 1:

b) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und E: $-4x_1 + x_2 - 8 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-0{,}5) \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $-4x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 8 = 0$

$$-4 \cdot 3{,}5 + 1 \cdot (-5) + 0 \cdot 7{,}5 - 8 = 0$$

$$-27 = 0 \qquad \text{(falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keinen Schnittpunkt

Aufgabe 1:

c) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E: $14x_1 + 17x_2 - 2x_3 - 183 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 14 + (-4) \cdot 17 + 1 \cdot (-2) = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $14x_1 + 17x_2 - 2x_3 - 183 = 0$

$$14 \cdot 6 + 17 \cdot (-9) - 2 \cdot (-5) - 183 = 0$$

$$-242 = 0 \qquad \text{(falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keinen Schnittpunkt

Aufgabe 2:

a) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2{,}5 \\ 22 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E: $-21x_1 - 34x_2 + 5x_3 - 6 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -21 \\ -34 \\ 5 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-21) + 2 \cdot (-34) + 1 \cdot 5 = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

<u>Punktprobe durchführen</u> (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $-21x_1 - 34x_2 + 5x_3 - 6 = 0$

$$-21 \cdot 9 - 34 \cdot (-2{,}5) + 5 \cdot 22 - 6 = 0$$

$$0 = 0 \qquad \text{(wahr)}$$

⇨ Gerade g liegt in der Ebene E

Aufgabe 2:

b) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E: $7x_1 - 4x_2 - 25x_3 + 53 = 0$

Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E
auf Orthogonalität prüfen

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -25 \end{pmatrix} = 7 \cdot 7 + 6 \cdot (-4) + 1 \cdot (-25) = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

Punktprobe durchführen (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $7x_1 - 4x_2 - 25x_3 + 53 = 0$

$$7 \cdot 8 - 4 \cdot (-4) - 25 \cdot 5 + 53 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{(wahr)}$$

⇨ Gerade g liegt in der Ebene E

Aufgabe 2:

c) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und E: $-11x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 94 = 0$

Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E
auf Orthogonalität prüfen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -11 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-11) + (-1) \cdot (-9) + 6 \cdot 4 = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

Punktprobe durchführen (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $-11x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 94 = 0$

$$-11 \cdot (-2) - 9 \cdot 0 + 4 \cdot 18 - 94 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{(wahr)}$$

⇨ Gerade g liegt in der Ebene E

Aufgabe 3:

a) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und E: $7x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = (-9) \cdot 7 + 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) = -58 \neq 0$$

⇨ g schneidet E

<u>Schnittpunkt berechnen</u>

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \; x_1 = -21 - 9\lambda \\ \Rightarrow \; x_2 = 1 + \lambda \\ \Rightarrow \; x_3 = 6 - 2\lambda \end{array}$$

x_1, x_2 und x_3 in Gleichung von E einsetzen

E: $7x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$

$$7 \cdot (-21 - 9\lambda) - 3 \cdot (1 + \lambda) - 4 \cdot (6 - 2\lambda) = 0$$

$$-174 - 58\lambda = 0 \qquad | +174; \; | :(-58)$$

$$\lambda = -\frac{174}{58}$$

$$\lambda = -3$$

λ – Wert in Gleichung der Geraden g einsetzen

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

⇨ Schnittpunkt $\underline{\underline{S\,(6|-2|\,12)}}$

Aufgabe 3:

b) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 22{,}5 \\ -4{,}5 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und E: $-10x_1 + 7x_2 - 8x_3 - 111 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-10) + (-3) \cdot 7 + 4 \cdot (-8) = -103 \neq 0$$

⇨ g schneidet E

<u>Schnittpunkt berechnen</u>

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 22{,}5 \\ -4{,}5 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x_1 = 22{,}5 + 5\lambda \\ &\Rightarrow x_2 = -4{,}5 - 3\lambda \\ &\Rightarrow x_3 = 12 + 4\lambda \end{aligned}$$

x_1, x_2 und x_3 in Gleichung von E einsetzen

E: $-10x_1 + 7x_2 - 8x_3 - 111 = 0$

$$-10 \cdot (22{,}5 + 5\lambda) + 7 \cdot (-4{,}5 - 3\lambda) - 8 \cdot (12 + 4\lambda) - 111 = 0$$

$$-463{,}5 - 103\lambda = 0 \qquad | + 463{,}5; \ | : (-103)$$

$$\lambda = -\frac{463{,}5}{103}$$

$$\lambda = -4{,}5$$

λ – Wert in Gleichung der Geraden g einsetzen

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 22{,}5 \\ -4{,}5 \\ 12 \end{pmatrix} + (-4{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

⇨ Schnittpunkt $\underline{\underline{S\,(0|\,9\,|-6)}}$

Aufgabe 3:

c) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ und E: $8x_1 - 31x_2 - 19x_3 - 99 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ -31 \\ -19 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 8 + 10 \cdot (-31) + 2 \cdot (-19) = -356 \neq 0$$

⇨ g schneidet E

<u>Schnittpunkt berechnen</u>

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow x_1 = 14 - \lambda \\ &\Rightarrow x_2 = -8 + 10\lambda \\ &\Rightarrow x_3 = -5 + 2\lambda \end{aligned}$$

x_1, x_2 und x_3 in Gleichung von E einsetzen

E: $8x_1 - 31x_2 - 19x_3 - 99 = 0$

$$8 \cdot (14 - \lambda) - 31 \cdot (-8 + 10\lambda) - 19 \cdot (-5 + 2\lambda) - 99 = 0$$

$$356 - 356\lambda = 0 \qquad | -356; \ | : (-356)$$

$$\lambda = \frac{356}{356}$$

$$\lambda = 1$$

λ – Wert in Gleichung der Geraden g einsetzen

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

⇨ Schnittpunkt <u>S (13| 2 |−3)</u>

Aufgabe 4:

a) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ und E: $-3x_1 - x_2 + x_3 + 23 = 0$

Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 0,5 \cdot (-1) + 3,5 \cdot 1 = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

Punktprobe durchführen (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $-3x_1 - x_2 + x_3 + 23 = 0$

$$-3 \cdot 13 - 1 \cdot 4 + 1 \cdot 20 + 23 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{(wahr)}$$

⇨ Gerade g liegt in der Ebene E

Aufgabe 4:

b) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ -10 \\ 28 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ und E: $-12x_1 + x_2 + 5x_3 + 76 = 0$

<u>Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E auf Orthogonalität prüfen</u>

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-12) + 7 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 = 23 \neq 0$$

⇨ g schneidet E

<u>Schnittpunkt berechnen</u>

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ -10 \\ 28 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \ x_1 = 21 - 3\lambda \\ \Rightarrow \ x_2 = -10 + 7\lambda \\ \Rightarrow \ x_3 = 28 - 4\lambda \end{array}$$

x_1, x_2 und x_3 in Gleichung von E einsetzen

E: $-12x_1 + x_2 + 5x_3 + 76 = 0$

$$-12 \cdot (21 - 3\lambda) + 1 \cdot (-10 + 7\lambda) + 5 \cdot (28 - 4\lambda) + 76 = 0$$

$$-46 + 23\lambda = 0 \qquad | +46; \ | :23$$

$$\lambda = \frac{46}{23}$$

$$\lambda = 2$$

λ – Wert in Gleichung der Geraden g einsetzen

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ -10 \\ 28 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

⇨ Schnittpunkt $\underline{\underline{S\,(15|\,4\,|20)}}$

Aufgabe 4:

c) gegeben: g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und E: $32x_1 - 4x_2 - 21x_3 - 154 = 0$

Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor der Ebene E
auf Orthogonalität prüfen

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ -21 \end{pmatrix} = 5 \cdot 32 + (-2) \cdot (-4) + 8 \cdot (-21) = 0$$

⇨ g echt parallel zu E oder g liegt in E

Punktprobe durchführen (z.B.: hier Aufpunkt der Geraden g in Ebene E einsetzen)

E: $32x_1 - 4x_2 - 21x_3 - 154 = 0$

$$32 \cdot 6 - 4 \cdot (-1) - 21 \cdot 5 - 154 = 0$$

$$-63 = 0 \quad \text{(falsch)}$$

⇨ echt parallel, es gibt keinen Schnittpunkt