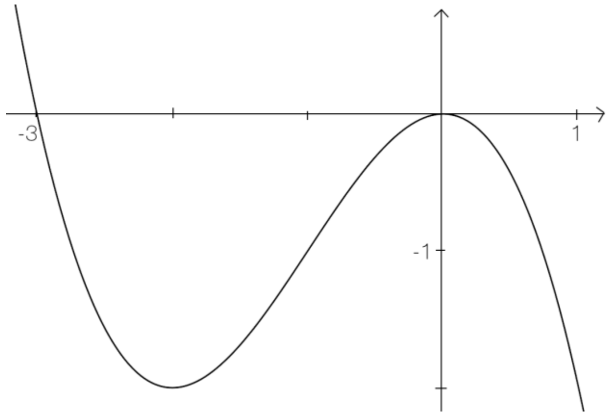
Lösungsblatt zu: Differentialquotient

Aufgabe 1:

$Gegeben: \ f(x) = -0{,}5x^3 - 1{,}5x^2$



a) Bestimmen Sie die Nullstellen:

Tipp:
Nullstellen

$\rightarrow \ f(x) = 0$

$-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 = 0 \qquad (-0{,}5x^2 ausklammern)$

$-0{,}5x^2(x+3) = 0$

Tipp:
Es reicht, wenn einer der Faktoren Null wird.

→ ganzes Produkt wird Null.

1. Fall:

$x^2 = 0 \qquad |\sqrt{}$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$

Nullstelle bei N₁ (0 | 0) (doppelte Nullstelle)

2. Fall:

$x + 3 = 0 \qquad |-3$

$\underline{\underline{x_2 = -3}}$

Nullstelle bei N₂ (-3 | 0) (einfache Nullstelle)

Tipp:
Steigung einer Kurve in Punkt P_0 (x_0 | $f(x_0)$)
→ Tangentensteigung m_{x_0} bestimmen.
(Differentialquotient)

$$m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Steigung in N_1 (0 | 0)

$$m_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 0}{x} \qquad (-0{,}5\text{x}^2 \text{ ausklammern})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-0{,}5x^2(x+3)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} -0{,}5x(x+3)$$

$$= 0$$

Steigung in N_2 (−3 | 0)

$$m_2 = \lim_{x \to -3} \frac{f(x) - f(0)}{x - (-3)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 0}{x + 3} \qquad (-0{,}5\text{x}^2 \text{ ausklammern})$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{-0{,}5x^2\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$$

$$= \lim_{x \to -3} -0{,}5x^2$$

$$= -0{,}5 \cdot (-3)^2$$

$$\underline{\underline{= -4{,}5}}$$

Tipp:
$m = \tan\varphi$

→ Taste $\boxed{\text{SHIFT / 2nd / INV}}$ benutzen

<u>Schnittwinkel bei N_1 (0 | 0)</u>

$\varphi = tan^{-1}(0) = 0^\circ$

$\rightarrow \underline{\underline{\varphi = 0^\circ}}$

Doppelte Nullstelle (Berührpunkt)
→ schneidet x-Achse nicht.

<u>Schnittwinkel bei N_2 (-3 | 0)</u>

$\varphi = tan^{-1}(-4{,}5)$

$\rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{-77^\circ}}$

b) Bestimmen Sie die Steigung von G_f in den Punkten P (-1 | y_P) und Q (1 | y_Q)

Tipp:
y–Koordinaten fehlen
→ x–Wert in $f(x)$ einsetzen.

<u>y–Koordinate von P</u>

$$
\begin{aligned}
y_P &= f(-1) \\
&= -0{,}5(-1)^3 - 1{,}5(-1)^2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

<u>y–Koordinate von Q</u>

$$
\begin{aligned}
y_Q &= f(1) \\
&= -0{,}5(1)^3 \ - 1{,}5(1)^2 \\
&= -2
\end{aligned}
$$

Steigung in P (−1 | −1)

$$m_P = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - (-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 1}{x+1}$$

Nebenrechnung

Tipp:
x + 1 im Zähler ausklammern
→ Polynomdivision

⇒

Tipp:
Potenzen von x kommen nicht vor.
→ mit Koeffizient null ergänzen.

$$
\begin{aligned}
&(-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 0\cdot x \ \ + 1) : (x+1) = \underline{\underline{-0{,}5x^2 - x + 1}}\\
&\underline{-(-0{,}5x^3 - 0{,}5x^2)}\\
&\qquad\qquad -x^2 + 0\cdot x\\
&\qquad\qquad \underline{-(-x^2 - 1\cdot x)}\\
&\qquad\qquad\qquad 1x \quad + 1\\
&\qquad\qquad\qquad \underline{-(x \quad + 1)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$$m_P = \lim_{x\to -1} \frac{(-0{,}5x^2 - x + 1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} \qquad (\,kürzen)$$

$$= \lim_{x\to -1} -0{,}5x^2 - x + 1$$

$$= -0{,}5(-1)^2 - (-1) + 1$$

$$\underline{\underline{m_P = 1{,}5}}$$

Schnittwinkel zwischen der Tangente im Punkt P und der x–Achse

Tipp:
$m = \tan\varphi$

→ Taste SHIFT / 2nd / INV benutzen

$$\varphi = tan^{-1}(1{,}5)$$

$$\Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{56{,}3°}}$$

Steigung in Q (1 | –2)

$$m_Q = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{-0{,}5x^3-1{,}5x^2-(-2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{-0{,}5x^3-1{,}5x^2+2}{x-1}$$

Nebenrechnung

Tipp:
x – 1 im Zähler ausklammern
→ Polynomdivision

$\Rightarrow$

Tipp:
Potenzen von x kommen nicht vor
→ mit Koeffizient null ergänzen.

$$
\begin{array}{l}
(-0{,}5x^3-1{,}5x^2+0\cdot x\ +2):(x-1)=\underline{\underline{-0{,}5x^2-2x-2}}\\
\underline{-(-0{,}5x^3+0{,}5x^2)}\\
\qquad\qquad -2x^2+0\cdot x\\
\qquad\qquad \underline{-(-2x^2+2\cdot x)}\\
\qquad\qquad\qquad -2\cdot x\ +2\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(-2\cdot x\ +2)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$m_Q = \lim_{x\to1}\frac{(-0{,}5x^2-2x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \qquad (kürzen)$$

$$= \lim_{x\to1}-0{,}5x^2-2x-2$$

$$= -0{,}5\cdot1^2-2\cdot1-2$$

$$\underline{\underline{m_Q = -4{,}5}}$$

Schnittwinkel zwischen der Tangente im Punkt Q und der x–Achse

Tipp:
$m = \tan\varphi$

→ Taste SHIFT / 2nd / INV benutzen

$$\varphi_Q = \tan^{-1}(-4{,}5)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi_Q \approx -77{,}5°}}$$

c) Wert der Steigung m in Punkt P(x_0 | y_0)

Tipp:
Steigung einer Kurve in Punkt P_0 (x_0 | $f(x_0)$)
→ Tangentensteigung m_{x_0} bestimmen.

$$m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{(Differentialquotient)}$$

$$m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - (-0{,}5{x_0}^3 - 1{,}5{x_0}^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 0{,}5{x_0}^3 + 1{,}5{x_0}^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-0{,}5x^3 + 0{,}5{x_0}^3 - 1{,}5x^2 + 1{,}5{x_0}^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-0{,}5(x^3 - {x_0}^3)}{x - x_0} - \frac{1{,}5(x^2 - {x_0}^2)}{x - x_0}$$

Tipp:
Binomische Formel anwenden
→ für Quadrat und höhere Potenzen

$$= \lim_{x \to x_0} -0{,}5 \frac{(x^2 + x \cdot x_0 + {x_0}^2)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} - 1{,}5 \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} -0{,}5\,(x^2 + x \cdot x_0 + {x_0}^2) - 1{,}5(x + x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} -0{,}5\,x^2 - 0{,}5x \cdot x_0 - 0{,}5{x_0}^2 - 1{,}5x - 1{,}5x_0$$

Tipp:
Grenzübergang (Limes berechnen).
→ $x = x_0$ einsetzen

$$= -0{,}5{x_0}^2 - 0{,}5x_0 \cdot x_0 - 0{,}5{x_0}^2 - 1{,}5x_0 - 1{,}5x_0$$

$$= 3 \cdot (-0{,}5{x_0}^2) + 2 \cdot (-1{,}5x_0)$$

$$m_{x_0} = \underline{\underline{-1{,}5{x_0}^2 - 3x_0}}$$

d) Ermitteln Sie das lokale Minimum rechnerisch.

Tipp:
Lokales Maximum / Minimum

→ Steigung m_{x_0} der Tangente = 0

x–Koordinate des Minimums berechnen

„m_{x_0}“: siehe Teilaufgabe c)

$$m_{x_0} = 0$$

$$-1{,}5{x_0}^2 - 3x_0 = 0 \qquad (-1{,}5{x_0}^2 \; ausklammern)$$

$$-1{,}5x_0(x_0 + 2) = 0$$

Tipp:
Es reicht, wenn einer der Faktoren Null wird.

→ ganzes Produkt wird Null.

1. Fall:

$\underline{\underline{x_0 = 0}}$ (nicht im gegebenen Intervall [-3; -1])

2. Fall:

$x_0 + 2 = 0 \quad | -2$

$\underline{\underline{x_0 = -2}}$

y–Koordinate des Minimums berechnen

$$f(x_0) = f(-2)$$

$$= -0{,}5(-2)^3 - 1{,}5(-2)^2$$

$$= -2$$

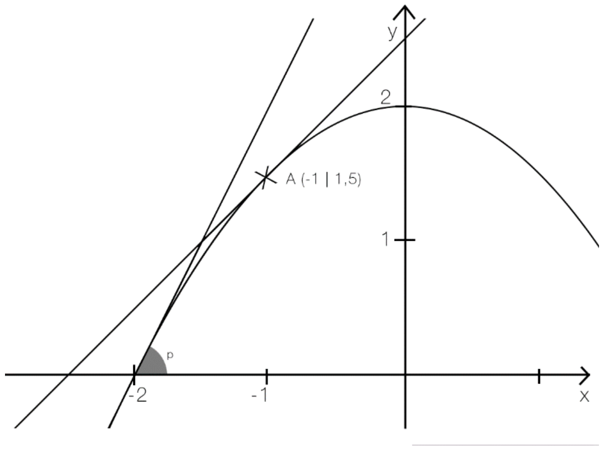
Minimum bei $\underline{\underline{\text{M (-2 | -2)}}}$

Aufgabe 2:

$g(x) = -0{,}5x^2 + 2$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt A (–1 | 1,5) des Graphen g.

<u>Steigung im Punkt A bestimmen</u>



Tipp:
Steigung einer Kurve in Punkt P_0 (x_0 | $f(x_0)$)
→ Tangentensteigung m_{x_0} bestimmen.
(Differentialquotient)

$$m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m_{-1} = \lim_{x \to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-0{,}5x^2 + 2 - 1{,}5}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-0{,}5x^2 + 0{,}5}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-0{,}5(x^2 - 1)}{x + 1} \qquad (3.\, binomische\ Formel\ anwenden)$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-0{,}5\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{x + 1}} \qquad (kürzen)$$

$$= -0{,}5(-1 - 1)$$

$$= -0{,}5 \cdot (-2)$$

$$\underline{\underline{m_{-1} = +1}}$$

Tipp:
Tangentengleichung.

→ Geradengleichung der Form y = mx + t

Punkt: A (–1 | 1,5) (x, y)
Steigung: m = 1 (siehe oben) } in Ansatz einsetzen

$1{,}5 = 1 \cdot (-1) + t$

$1{,}5 = -1 + t \qquad | + 1$

$2{,}5 = t$

Tangentengleichung

$\underline{\underline{y = x + 2{,}5}}$

b) Nullstelle von g bestimmen.

Tipp:
Nullstelle

→ $g(x) = 0$

$-0{,}5x^2 + 2 = 0 \qquad | - 2$

$-0{,}5x^2 = -2 \qquad |: (-0{,}5)$

$x^2 = 4 \qquad |\sqrt{}$

$\underline{\underline{x_1 = +2}}$ und $\underline{\underline{x_2 = -2}}$

Tipp:
Quadratische Wurzel
→ Es gibt immer zwei Lösungen.

Hier: „Schnittpunkte mit der negativen x-Achse“ gesucht
→ Nur N (–2 | 0)

Tangentensteigung m

Tipp:
Steigung einer Kurve in Punkt $P_0\,\left(x_0 \,\middle|\, f(x_0)\right)$
→ Tangentensteigung m_{x_0} bestimmen.
(Differentialquotient)

$$m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m_{-2} = \lim_{x \to -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-0{,}5x^2 + 2 - 0}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-0{,}5x^2 + 2}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-0{,}5(x^2 - 4)}{x + 2} \qquad (3.\, binomische\ Formel\ anwenden)$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-0{,}5\cancel{(x+2)}(x - 2)}{\cancel{x + 2}} \qquad (kürzen)$$

$$= -0{,}5(-2 - 2) = -0{,}5(-4) = +2$$

$$m_{-2} = 2$$

Schnittwinkel der Tangente mit der x–Achse

Tipp:
$m = \tan\varphi$

→ Taste SHIFT / 2nd / INV benutzen

$$\varphi = tan^{-1}(+2)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi \approx 63{,}43°}}$$

Aufgabe 3:

$$V(t) = \frac{750t}{250 + t^3}$$

a) In welchem Monat wurden die meisten Smartphones verkauft?

Im 5. Monat wurden 10.000 Smartphones verkauft.

b) Wie groß war die mittlere Änderungsrate der Verkäufe im ersten Monat nach der Einführung?

Tipp:
Mittlere Änderungsrate m einer Funktion f im Intervall [a ; b]
(Differenzenquotient)

$$\rightarrow m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$m = \frac{3000 - 0}{1 - 0}$$

Im 1. Monat wurden fast 3000 Stück im Monat verkauft.

c) Wann sank der Verkauf am stärksten pro Monat und wie groß ist er etwa?

Im 8. Monat ist die Abnahme etwa 1000 Stück im Monat gesunken.

d) Geben Sie einen mathematischen Rechenausdruck für die momentane Änderungsrate im 10. Monat an.

Tipp:
Momentane Änderungsrate m_{x_0} einer Funktion f im Punkt $P_0\ (x_0 \mid f(x_0))$
(Differentialquotient)

$$\rightarrow m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Gesuchter Rechenausdruck

$$m_{10} = \lim_{t \to 10} \frac{V(t) - V(10)}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{\frac{750t}{250 + t^3} - 6}{t - 10}$$

Genauen Wert berechnen

$$\lim_{t \to 10} \frac{\frac{750t}{250 + t^3} - 6}{t - 10} \qquad (\textit{Zähler gleichnamig machen})$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{\frac{750t - 6 \cdot (250 + t^3)}{250 + t^3}}{t - 10} \qquad (\textit{mit Kehrwert multiplizieren})$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{750t - 6 \cdot (250 + t^3)}{(250 + t^3)(t - 10)} \qquad (\textit{Zähler ausmultiplizieren})$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{750t - 1500 - 6t^3}{(250 + t^3)(t - 10)}$$

Nebenrechnung

Tipp:
(t–10) im Zähler ausklammern
→ Polynomdivision

⇒

Tipp:
Potenzen von x^2 kommen nicht vor.
→ mit Koeffizient null ergänzen.

$$\begin{aligned}
&(-6t^3 + 0 \cdot t^2 + 750t - 1500) : (t - 10) = \underline{\underline{-6t^2 - 60t + 150}} \\
&\underline{-(-6t^3 + 60t^2)} \\
&\qquad -60t^2 + 750t \\
&\qquad \underline{-(-60t^2 + 600t)} \\
&\qquad\qquad 150t - 1500 \\
&\qquad\qquad \underline{-(150t - 1500)} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{(-6t^2 - 60t + 150) \cdot \cancel{(t - 10)}}{(250 + t^3)\cancel{(t - 10)}}$$

$$= \frac{-6 \cdot (10)^2 - 60 \cdot 10 + 150}{250 + 10^3}$$

$$\underline{\underline{\approx -0{,}84}}$$

Aufgabe 4:

a) Gegeben:

$f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 - 2x + 4$

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 9x - 2$

$g(x) = 8{,}5x - 5$

<u>Tangente des Graphen G_f parallel zur Geraden g</u>

Tipp:
Zwei Geraden parallel zueinander.
$\rightarrow m_1 = m_2$

$$m_g = m_f$$

Tipp:
Steigung einer Tangente.
$\rightarrow m_t = f'(x)$

$\Rightarrow \quad m_f = f'(x)$

$$f'(x) = m_g$$

$$1{,}5x^2 - 9x - 2 = 8{,}5 \qquad | - 8{,}5$$

$$1{,}5x^2 - 9x - 10{,}5 = 0 \qquad (Lösungsformel\ für\ quadratische\ Gleichungen\ anwenden)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot (-10{,}5)}}{2 \cdot 1{,}5}$$

$\underline{\underline{x_1 = -1}} \qquad und \qquad \underline{\underline{x_2 = 7}}$

<u>Schnittwinkel der Tangenten mit der x–Achse</u>

Tipp:
Schnittwinkel mit der x-Achse ($m = \tan \varphi$)

→ Taste SHIFT / 2nd / INV benutzen

$\varphi = tan^{-1}(8{,}5)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi \approx 83{,}29°}}$

b) Gleichung der Tangente im Punkt A (6,5 | y_A)

Steigung m berechnen

Tipp:
Steigung einer Kurve in Punkt P_0 (x_0 | $f(x_0)$)
→ Tangentensteigung m_{x_0} bestimmen.

$$m_{x_0} = f'(x_0)$$

$$m = f'(6{,}5)$$
$$= 1{,}5 \cdot (6{,}5)^2 - 9 \cdot (6{,}5) - 2$$
$$m \approx 2{,}88$$

Funktionswert von Punkt A (6,5 | $f(6{,}5)$) berechnen

$$f(6{,}5) = 0{,}5 \cdot (6{,}5)^3 - 4{,}5 \cdot (6{,}5)^2 - 2 \cdot (6{,}5) + 4$$

$$f(6{,}5) \approx -61{,}81$$

Tangentengleichung aufstellen

Tipp:
Tangentengleichung.

→ Geradengleichung der Form y = mx + t

x y
Punkt: A (6,5 | -61,81)
Steigung: m = 2,88

in Ansatz einsetzen

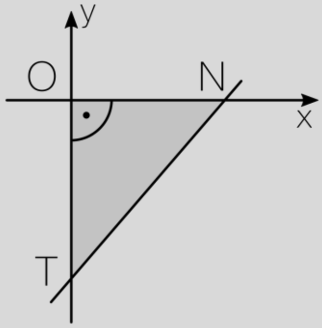
$$-61{,}81 = 2{,}88 \cdot 6{,}5 + t$$
$$-61{,}81 = 18{,}72 + t \qquad | -18{,}72$$
$$-80{,}5 \approx t$$

Tangentengleichung

$$\underline{\underline{t(x) = 2{,}88 \cdot x - 80{,}5}}$$

c) Flächenstück zwischen den Koordinatenachsen und der Tangente (Teilaufgabe b) ist ein rechtwinkliges Dreieck OTN.

Tipp:
Skizze



Koordinaten von N berechnen (= Nullstelle der Tangente)

Tipp:
Nullstelle der Tangente $t(x)$
$\rightarrow t(x) = 0$

$2{,}88x - 80{,}5 = 0 \qquad | + 80{,}5$

$2{,}88x = 80{,}5 \qquad |: 2{,}88$

$\underline{\underline{x \approx 28}}$

$\underline{\underline{\rightarrow \overline{ON} \approx 28\ LE}}$

Koordinaten von T berechnen (= Schnittpunkt mit der y–Achse)

Tipp:
y-Achsenschnitt t der Tangente $t(x) = m \cdot x + t$
$\rightarrow t = t(0)$

$t(0) = 2{,}88 \cdot 0 - 80{,}5$

$t = -80{,}5$

$\rightarrow \underline{\underline{\overline{OT} = 80{,}5\ LE}}$

Flächeninhalt des Dreieck OTN

Tipp:
Fläche des Dreiecks.
$\rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$A = \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{ON} \cdot \overline{OT}\right) FE$

$A = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 80{,}5\ FE$

$\underline{\underline{A = 1127\ FE}}$

Aufgabe 5:

Gegeben: $s(t) = 5 \cdot t^2$

a) Bestimmen sie den Wert $\frac{s(30)-s(20)}{10}$

$$\frac{s(30)-s(20)}{10}$$

$$= \frac{5 \cdot 30^2 - 5 \cdot 20^2}{10}$$

$$\approx \underline{\underline{250}}$$

Tipp:

Der Ausdruck $\frac{s(30)-s(20)}{10}$ *ergibt sich durch einsetzen in*

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} \quad mit\ t_2 = 30\ und\ t_1 = 20$$

Dies ist der Differentialquotient der Funktion $s(t)$ im Intervall $[t_1\ ;\ t_2]$.

Er gibt die Änderung der Fallhöhe $s(t)$ innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls an.

→ Dieser Ausdruck wird als mittlere Geschwindigkeit $v(t)$ bezeichnet.

$$v(t) = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

Deutung:

Die mittlere Geschwindigkeit zwischen der 20. Und 30. Sekunde beträgt 250 $\frac{m}{s}$

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit 40 Sekunden nach Beginn?

Tipp:

Die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ der Funktion $s(t)$ zum Zeitpunkt t_0

(Differentialquotient)

$$\rightarrow v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

$$v(40) = \lim_{t \to 40} \frac{s(t) - s(40)}{t - 40} =$$

$$= \lim_{t \to 40} \frac{5 \cdot t^2 - 5 \cdot 40^2}{t - 40} \qquad (\text{"5"}\ im\ Zähler\ ausklammern)$$

$$= \lim_{t \to 40} \frac{5(t^2 - 40^2)}{t - 40} \qquad (3.\, binomische\ Formel\ anwenden)$$

$$= \lim_{t \to 40} \frac{5\cancel{(t - 40)}(t + 40)}{\cancel{t - 40}}$$

$$= 5(40 + 40) = 5 \cdot 80 = \underline{\underline{400}}$$

Die Geschwindigkeit beträgt nach 40 Sekunden genau $400 \frac{m}{s} = 1440 \frac{km}{h}$ dabei ist die Fallhöhe ca. 8000 Meter.
(Info: Die Schallgeschwindigkeit beträgt ungefähr $1200 \frac{km}{h}$)

Aufgabe 6:

a) Gegeben

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}2\,(x^2+5) & für \quad -5 \le x \le 4 \\ -0{,}8x + 7{,}4 & für \quad 4 < x \le 9{,}25 \end{cases}$$

<u>Parabelterm in Scheitelform angegeben</u>

$y = 0{,}2(x^2+5) \quad (\, ausmultiplizieren)$

$\quad = \underline{\underline{0{,}2x^2+1}} \qquad (Scheitelform)$

eigentlich:
vollständige Scheitelform
$0{,}2(x-0)^2+1$

b) Berechnen Sie das mittlere Gefälle auf den ersten 3 Metern.

Tipp:
Mittlere Steigung m einer Funktion f im Intervall [a ; b]
(Differenzenquotient)

$$\rightarrow m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$m = \frac{g(-5)-g(-2)}{-5-(-2)} = \frac{0{,}2((-5)^2+5)-0{,}2((-2)^2+5)}{-5+2}$$

$$m = \frac{4{,}2}{-3} = \underline{\underline{-1{,}4}}$$

c)

Tipp:
Tangentengleichung.

→ Geradengleichung der Form y = mx + t

y–Koordinate des Punktes K (x = 4)

$g(4) = -0{,}2(4^2 + 5) \qquad (weil\ x = 4\ nicht\ zum\ Bereich\ 3\ gehört)$

$g(4) = 4{,}2$

Tangentengleichung aufstellen

$$\left.\begin{array}{l} \quad\ \text{x} \quad \text{y} \\ K\ (4 \mid 4{,}2) \\ m = 1{,}6\ (siehe\ Teilaufgabe\ c) \end{array}\right\}\ \text{in Ansatz einsetzen}$$

$4{,}2 = 1{,}6 \cdot 4 + t \qquad (nach\ t\ auflösen)$

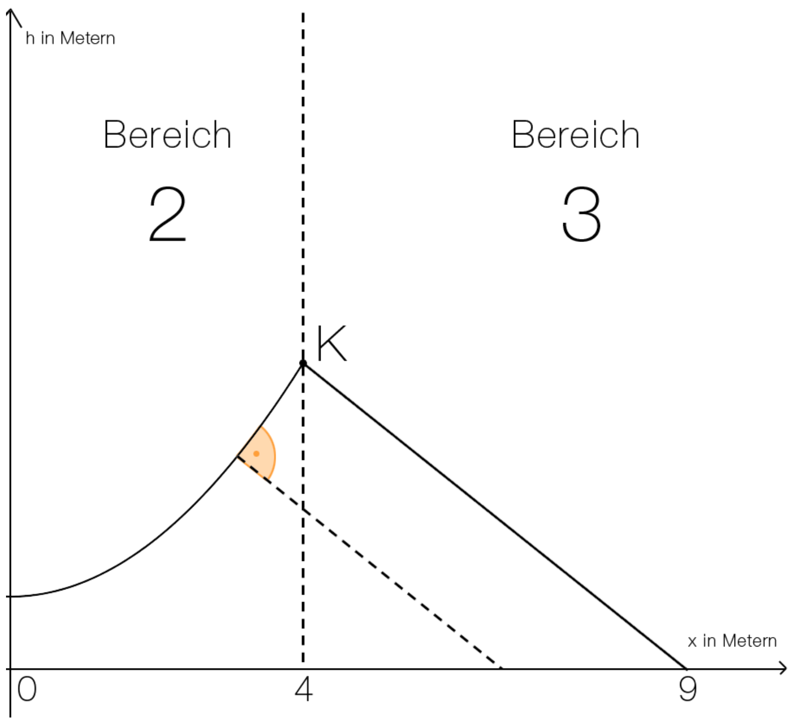
$4{,}2 = 6{,}4 + t \qquad | - 6{,}4$

$\underline{\underline{-2{,}2 = t}}$

Tangentengleichung

$\underline{\underline{t: y = 1{,}6 \cdot x - 2{,}2}}$

d)



$m_{(Bereich\ 3)} = -0{,}8 \qquad (siehe\ Teilaufgabe\ b)\ )$

$$m_{(Bereich\ 2)} = -\frac{1}{m_{(Bereich\ 3)}}$$

$$m_{(Bereich\ 2)} = -\frac{1}{-0{,}8} = 1{,}25$$

Tipp:
Gerade g ist die Normale (Senkrechte) zur Geraden h

$\rightarrow m_g \cdot m_h = -1 \qquad |: m_h$

$$m_g = -\frac{1}{m_h}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = m_{(Bereich\ 2)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{0{,}2x^2 + 1 - (0{,}2{x_0}^2 + 1)}{x - x_0} = m_{(Bereich\ 2)} \qquad (vergleiche\ Teilaufgabe\ c)\ )$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{0{,}2x^2 \cancel{+1} - 0{,}2{x_0}^2 \cancel{-1}}{x - x_0} = m_{(Bereich\ 2)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{0{,}2(x^2 - {x_0}^2)}{x - x_0} = m_{(Bereich\ 2)} \qquad (3.\ binomische\ Formel\ anwenden)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{0{,}2(\cancel{x - x_0})(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = m_{(Bereich\ 2)}$$

$$\lim_{x \to x_0} 0{,}2(x - x_0) = 0{,}2(x_0 + x_0) = 0{,}2 \cdot 2x_0$$

$m_{(Bereich\ 2)} = 0{,}4 \cdot x_0 \qquad \left(\triangleq -\frac{1}{m_{(Bereich\ 3)}}\right)$

$0{,}4x_0 = 1{,}25 \qquad |:0{,}4$

$\underline{\underline{x_0 = 3{,}125}}$

Tipp:
Koordinaten von Punkt K*

→ x_0 in Funktion einsetzen, die hier definiert ist.

$g_{(Bereich\ 2)}(x) = 0{,}2(x^2 + 5)$

$= 0{,}2(3{,}125^2 + 5)$

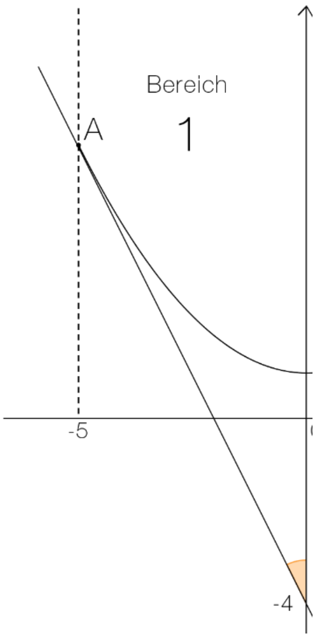
$\approx 2{,}95$

Neuer Punkt K* (3,13 | 2,95)

$$\left(\begin{array}{c}\text{Nicht verlangt / ohne Herleitung} \\ \text{Neue Gerade} \\ y = -0{,}8x + 5{,}45\end{array}\right)$$

e)

An der Stelle x = –5 beträgt die Ableitung g'(x) = –2 ($\triangleq$ $der\ Steigung\ m$).
Bestimmen Sie den Schnittwinkel ε den die Tangente im Punkt A mit der **y-Achse** einschließt.
Runden Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen.



Tipp:
Koordinaten von Punkt A

→ $x = -5$ in Funktion einsetzen, die hier definiert ist.

Koordinaten von Punkt A

$g_{(Bereich\ 1)}(x) = 0{,}2\ (x^2 + 5)$

$g_{(Bereich\ 1)}(-5) = 0{,}2[(-5)^2 + 5]$

= 6

→ $\underline{\underline{A(-5\mid 6)}}$

Schnittwinkel ε berechnen

Tipp:
Schnittwinkel ε mit der y-Achse.

→ zuerst Schnittwinkel φ mit der x-Achse bestimmen
$(m = -2 \; siehe \; Angabe)$

Schnittwinkel φ mit der **x-Achse**

Tipp:
$m = \tan\varphi$

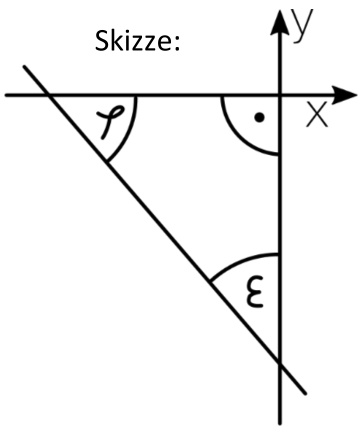
→ Taste SHIFT / 2nd / INV benutzen

$|\varphi| = \tan^{-1}(-2) = |-63{,}43°| = 63{,}43°$

Schnittwinkel ε mit der **y-Achse**

Tipp:
Innenwinkelsumme im Dreieck gleich 180°

Skizze:



$\rightarrow \varphi + \varepsilon + 90 = 180° \qquad | -90° \quad | -\varphi$

$\varepsilon = 90° - \varphi$

$\varepsilon = 90° - 63{,}43°$

$\varepsilon \approx \underline{\underline{26{,}57°}}$

Der Schnittwinkel mit der y-Achse beträgt ca. 26,57°

Aufgabe 7:

a) Gegeben ist die Funktion

$f(x) = ax(x-3)^2$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ für alle Parameter eine waagrechte Tangente bei x = 1 besitzt.

Tipp:
Waagrechte Tangente

$$\rightarrow m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{ax(x-3)^2 - ax_0(x_0-3)^2}{x - x_0} \qquad (2. \, binomische\ Formel\ anwenden)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{ax(x^2 - 6x + 9) - ax_0({x_0}^2 - 6x_0 + 9)}{x - x_0} \qquad (Klammern\ durch\ Ausmultiplizieren\ auflösen)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{ax^3 - 6ax^2 + 9ax - a{x_0}^3 + 6a{x_0}^2 - 9ax_0}{x - x_0}$$

Tipp:
Nach Potenzen ordnen und zusammenfassen.

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x^3 - {x_0}^3) - 6a(x^2 - {x_0}^2) + 9a(x - x_0)}{x - x_0}$$

Tipp:

$(x - x_0)$ ausklammern

→ 3. Binomische Formel für zweite und dritte Potenz verwenden.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a-b)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x^2 + x \cdot x_0 + {x_0}^2)(x - x_0) - 6a(x + x_0)(x - x_0) + 9a(x - x_0)}{x - x_0}$$ $(\,(x - x_0)\ ausklammern)$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[a(x^2 + x \cdot x_0 + {x_0}^2) - 6a(x + x_0) + 9a] \cdot (x - x_0)}{x - x_0}$$ $(kürzen)$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[a(x^2 + x \cdot x_0 + {x_0}^2) - 6a(x + x_0) + 9a] \cancel{\cdot (x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} a(x^2 + x \cdot x_0 + {x_0}^2) - 6a(x + x_0) + 9a$$

$$= a\underbrace{({x_0}^2 + x_0 \cdot x_0 + x_0^2)}_{3x_0^2} - 6a\underbrace{(x_0 + x_0)}_{2x_0} + 9a$$

$$= a \cdot 3x_0^2 - 6a \cdot 2x_0 + 9a$$

Tipp:
Ansatz: $m_{x_0} = 0$
→ Term muss gleich Null sein.

$$3a{x_0}^2 - 12ax_0 + 9a = 0 \qquad |:3$$

$$a{x_0}^2 - 4ax + 3a = 0$$

Tipp:
Nullstellen einer Quadratischen Funktion gesucht.

→ Lösungsformel verwenden
(Mitternachtsformel)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4a) \pm \sqrt{(-4a)^2 - 4 \cdot a \cdot (3a)}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2a}$$

$$= \frac{4a \pm \sqrt{4a^2}}{2a} = \frac{4a \pm 2a}{2a}$$

$$x_{01} = \frac{4a + 2a}{2a} = \frac{6a}{2a} = 3 \qquad x_{02} = \frac{4a - 2a}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$$

Die Funktion hat für alle Parameter a eine waagrechte Tangente bei x = 1, weil x unabhängig von a ist.

b) Die Funktion soll an der Stelle x = 0,5 eine Steigung von 1,5 haben.
Bestimmen Sie den entsprechenden Parameterwert a.

Tipp:
Tangentensteigung = Differentialquotient

$\rightarrow m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1{,}5$

Siehe Teilaufgabe a)

Ausdruck des Differentialquotienten.

$m_{x_0} = 3ax_0 - 12ax_0 + 9a$

Tipp:
Werte für x_0 und m einsetzen.

→ nach a auflösen können.

$1{,}5 = 3a(0{,}5)^2 - 12a(0{,}5) + 9 \cdot a$

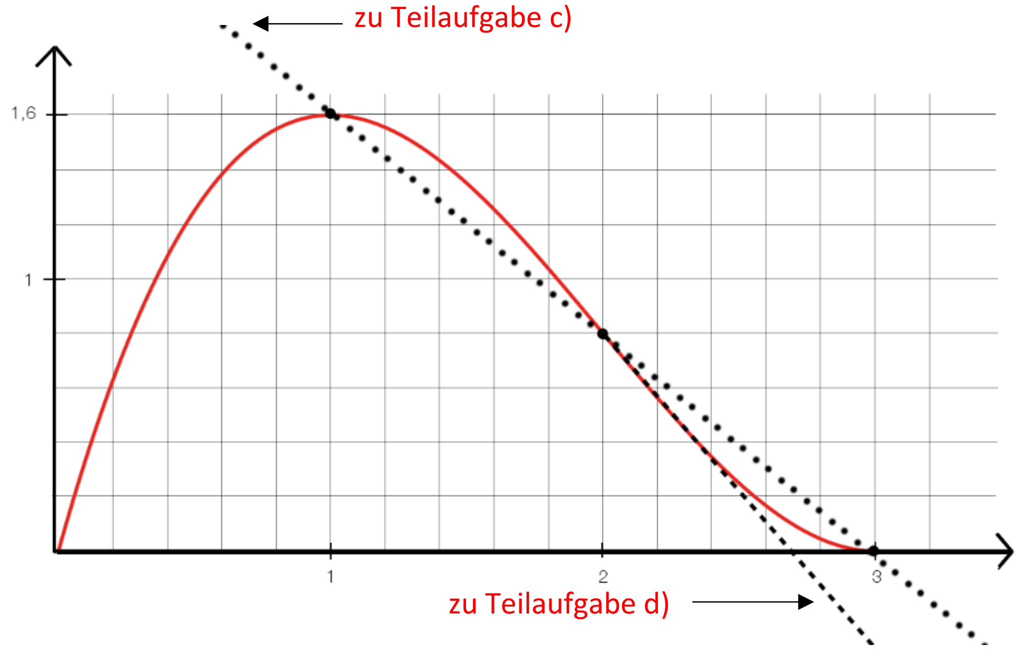
$1{,}5 = 0{,}75a - 6a + 9a \qquad (zusammenfassen)$

$1{,}5 = 3{,}75a \qquad | : 3{,}75$

$0{,}4 = a$

Ab jetzt gilt:

Parameterwert: a = 0,4



c)

Tipp:
(Mittleres) Gefälle= Differenzenquotient

$$\rightarrow m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Werte einsetzen

$$m = \frac{0{,}4 \cdot 1 \cdot (1-3)^2 - 0{,}4 \cdot 3(3-3)^2}{1-3}$$

$$= \frac{1{,}6 - 0}{-2}$$

$$= \frac{1{,}6}{2}$$

$$m = -0{,}8$$

Das mittlere Gefälle beträgt 80%.

d) Berechnen Sie um wieviel Prozent der Wall jetzt kürzer ist.

Tipp:

Die neue Nullstelle der Funktion berechnen.

→ Tangentengleichung im Punkt $P\ (2 \mid f(2))$ aufstellen.
→ Punkt-Koordinaten berechnen und Steigung in diesem Punkt berechnen

y–Koordinate des Punktes P bestimmen

$f(2) = 0{,}4 \cdot 2(2-3)^2$

$\quad = 0{,}8$

P (2 | 0,8)

Steigung m bestimmen

$m = 3a{x_0}^2 - 12ax_0 + 9a$ Steigung, siehe Teilaufgabe a)

für $x_0 = 2$

$m = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 2^2 - 12 \cdot 0{,}4 \cdot 2 + 9 \cdot 0{,}4$

$m = -1{,}2$

Geradengleichung aufstellen:

P (2 | 0,8) und $m = -1{,}2$

Im Ansatz: $y = mx + t$ einsetzen

$0{,}8 = -1{,}2 \cdot 2 + t \qquad (nach\ t\ auflösen)$

$0{,}8 = -2{,}4 + t \qquad | + 2{,}4$

$3{,}2 = t$

Geradengleichung lautet: $f^*: y = -1{,}2x + 3{,}2$

Neues Ende der Dammkrone

Tipp:

Nullstelle

$\rightarrow f^*(x) = 0$

$$-1{,}2x + 3{,}2 = 0 \qquad | -3{,}2$$

$$-1{,}2x = -3{,}2 \qquad |:(-1{,}2)$$

$$x = 2{,}67$$

Prozentrechnung

Tipp:

Grundwert alte Länge	≙	100%
Prozentwert neue Länge	≙	x%

→ Dreisatz oder Formel

Mit Dreisatz:

3m	≙	100%
0,03m	≙	1%
2,67m	≙	89%

Mit Formel:

$$p = \frac{Prozentwert}{Grundwert} \cdot 100 = \frac{2{,}67}{3} \cdot 100\%$$

$$p = 89\%$$

Die neue Länge ist um 11% kürzer.