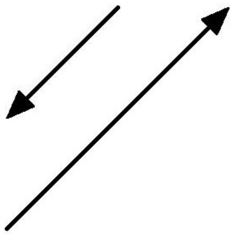
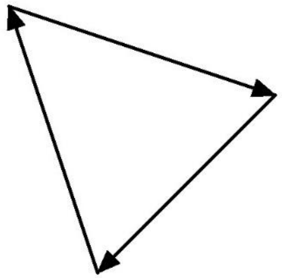
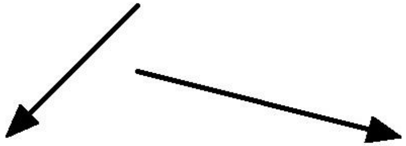
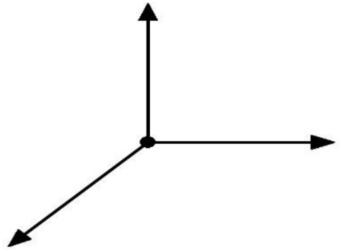
# Lineare Un-/Abhängigkeit von Vektoren

| linear abhängig | | linear unabhängig | |
|---|---|---|---|
| 2 Vektoren<br>**zwei** linear abhängige Vektoren heißen<br>**kollinear** | 3 Vektoren<br>**drei** linear abhängige Vektoren heißen<br>**komplanar** | 2 Vektoren | 3 Vektoren |
|  |  |  |  |
| **kollinear:**<br>Vektoren sind parallel<br>(sind ein Vielfaches voneinander,<br>bzw. sind zur gleichen Geraden parallel) | **komplanar:**<br>Vektoren **nicht** parallel<br>(liegen **IMMER** in einer Ebene,<br>bzw. sind zu der gleichen Ebene parallel)<br>HINWEIS:<br>zwei Vektoren sind immer komplanar | **NICHT** kollinear:<br>Vektoren sind **nicht** parallel | **NICHT** komplanar:<br>liegen **nicht** in einer Ebene<br>$\Rightarrow$ spannen keine Fläche auf,<br>sondern bilden einen Körper<br>(z.B. Pyramide, Spat, Parallelflach)<br>bilden eine Basis im $\mathbb{R}^3$ |

| Berechnung | | |
|---|---|---|
| Linearkombination | Gauß Verfahren | Spatprodukt (Parallelflach) |
| Beispiel siehe nächste Seite | Beispiel siehe nächste Seite | Beispiel siehe nächste Seite |

# Lineare Un-/Abhängigkeit von Vektoren

| Berechnung | | | |
|---|---|---|---|
| Linearkombination | | | |
| linear abhängig | | linear **un**abhängig | |
| 2 Vektoren | 3 Vektoren | 2 Vektoren | 3 Vektoren |
| Gegeben:<br>$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}3,4\\-4,6\\6,4\end{pmatrix}$<br><br>Gesucht:<br>$\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig?<br><br>$\vec{b} = u \cdot \vec{a}$<br><br>$\begin{pmatrix}3,4\\-4,6\\6,4\end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix}$<br><br>(I) $3,4 = -1,7 \cdot u \Rightarrow u = -2$<br>(II) $-4,6 = 2,3 \cdot u \Rightarrow u = -2$<br>(III) $6,4 = -3,2 \cdot u \Rightarrow u = -2$<br><br>Gleichung (I); (II) und (III) liefern den gleichen u-Wert<br>$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig | Gegeben:<br>$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}5,1\\-1,9\\4,6\end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2,5\\-2,5\end{pmatrix}$<br><br>Gesucht:<br>$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?<br><br>$\vec{c} = u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$<br><br>$\begin{pmatrix}0\\2,5\\-2,5\end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}5,1\\-1,9\\4,6\end{pmatrix}$<br><br>(I) $0 = -1,7u + 5,1v \quad \| + 1,7u$<br>$1,7u = 5,1v \quad \| : 1,7$<br>$u = 3v$ (I)*<br><br>(I)* in (II) einsetzen<br>(II) $2,5 = 2,3 \cdot 3v - 1,9v$<br>$2,5 = 5v \quad \| : 5$<br>$v = 0,5$ (II)*<br><br>(II)* in (I)* einsetzen<br>$u = 3 \cdot 0,5$<br>$u = 1,5$<br><br>$u$ und $v$ in (III) einsetzen<br>(III) $-2,5 = -3,2 \cdot 1,5 + 4,6 \cdot 0,5$<br>$-2,5 = -2,5$ $(wahr)$<br><br>$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig | Gegeben:<br>$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}3,4\\-4,6\\-9,6\end{pmatrix}$<br><br>Gesucht:<br>$\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig?<br><br>$\vec{b} = u \cdot \vec{a}$<br><br>$\begin{pmatrix}3,4\\-4,6\\-9,6\end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix}$<br><br>(I) $3,4 = -1,7 \cdot u \Rightarrow u = -2$<br>(II) $-4,6 = 2,3 \cdot u \Rightarrow u = -2$<br>(III) $-9,6 = -3,2 \cdot u \Rightarrow$ $\mathbf{u = 3}$<br><br>Gleichung (I); (II) und (III) liefern **nicht** den gleichen u-Wert<br>$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **nicht** linear abhängig,<br>d.h. sie sind linear **un**abhängig | Gegeben:<br>$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}5,1\\-1,9\\4,6\end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2,5\\6,5\end{pmatrix}$<br><br>Gesucht:<br>$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?<br><br>$\vec{c} = u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$<br><br>$\begin{pmatrix}0\\2,5\\6,5\end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix}-1,7\\2,3\\-3,2\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}5,1\\-1,9\\4,6\end{pmatrix}$<br><br>(I) $0 = -1,7u + 5,1v \quad \| + 1,7u$<br>$1,7u = 5,1v \quad \| : 1,7$<br>$u = 3v$ (I)*<br><br>(I)* in (II) einsetzen<br>(II) $2,5 = 2,3 \cdot 3v - 1,9v$<br>$2,5 = 5v \quad \| : 5$<br>$v = 0,5$ (II)*<br><br>(II)* in (I)* einsetzen<br>$u = 3 \cdot 0,5$<br>$u = 1,5$<br><br>$u$ und $v$ in (III) einsetzen<br>(III) $6,5 = -3,2 \cdot 1,5 + 4,6 \cdot 0,5$<br>$6,5 = -2,5$ ( **nicht** wahr)<br><br>$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **nicht** linear abhängig<br>d.h. sie sind linear **un**abhängig |

# Lineare Un-/Abhängigkeit von Vektoren

## Berechnung

### Gauß Verfahren

ab mindestens 3 Vektoren notwendig

#### linear abhängig

Gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ -1{,}9 \\ 4{,}6 \end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{ccc|cl}
\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & & \\
\hline
-1{,}7 & 5{,}1 & 0 & 0 & \\
2{,}3 & -1{,}9 & 2{,}5 & 0 & \\
-3{,}2 & 4{,}6 & -2{,}5 & 0 & \\
\hline
-1{,}7 & 5{,}1 & 0 & 0 & \\
0 & 8{,}5 & 4{,}25 & 0 & 2{,}3 \cdot \mathrm{I} + 1{,}7 \cdot \mathrm{II} \\
0 & 8{,}5 & 4{,}25 & 0 & 3{,}2 \cdot \mathrm{I} - 1{,}7 \cdot \mathrm{III} \\
\hline
-1{,}7 & 5{,}1 & 0 & 0 & \\
0 & 8{,}5 & 2{,}5 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{II} - \mathrm{III}
\end{array}$$

nicht eindeutig lösbar

$\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig

#### linear **un**abhängig

Gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ -1{,}9 \\ 4{,}6 \end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{ccc|cl}
\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & & \\
\hline
-1{,}7 & 5{,}1 & 0 & 0 & \\
2{,}3 & -1{,}9 & 2{,}5 & 0 & \\
-3{,}2 & 4{,}6 & 6{,}5 & 0 & \\
\hline
-1{,}7 & 5{,}1 & 0 & 0 & \\
0 & 8{,}5 & 4{,}25 & 0 & 2{,}3 \cdot \mathrm{I} + 1{,}7 \cdot \mathrm{II} \\
0 & 8{,}5 & -11{,}05 & 0 & 3{,}2 \cdot \mathrm{I} - 1{,}7 \cdot \mathrm{III} \\
\hline
-1{,}7 & 5{,}1 & 0 & 0 & \\
0 & 8{,}5 & 2{,}5 & 0 & \\
0 & 0 & 15{,}3 & 0 & \mathrm{II} - \mathrm{III}
\end{array}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = 0$

eindeutig lösbar

$\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear **un**abhängig

### Spatprodukt (Parallelflach)

nur bei 3 Vektoren möglich

#### linear abhängig

Gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ -1{,}9 \\ 4{,}6 \end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

$$(bzw.\ (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ -1{,}9 \\ 4{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6{,}75 \\ 12{,}75 \\ 12{,}75 \end{pmatrix}$$

$$= 11{,}475 + 29{,}325 - 40{,}8 = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig

#### linear **un**abhängig

Gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ -1{,}9 \\ 4{,}6 \end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

$$(bzw.\ (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ -1{,}9 \\ 4{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ 2{,}3 \\ -3{,}2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -23{,}85 \\ -33{,}15 \\ 12{,}75 \end{pmatrix}$$

$$= 40{,}545 - 76{,}245 - 40{,}8$$

$$= -76{,}5 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **nicht** linear abhängig

d.h. sie sind linear **un**abhängig